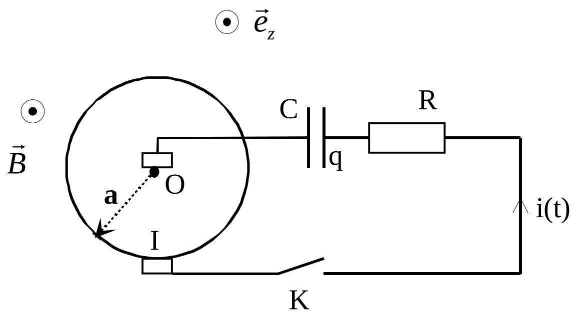
-EXERCICE 28.4-

• ENONCE :

« Freinage d'un disque par induction »

Les freins électromagnétiques (de type « TELMA ») sur les cars ou les camions fonctionnent sur le principe de la « roue de Barlow » ; considérons le schéma ci-dessous :



Les liaisons en O et I sont parfaites

Le moment d'inertie du disque en O est noté J

Le champ magnétique est uniforme

Un disque métallique de rayon a peut tourner librement autour de son axe dans un champ magnétique permanent et uniforme ; des contacts glissants en O et I permettent de fermer le circuit électrique au travers d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C initialement déchargé.

La roue est animée d'une vitesse de rotation initiale ω_0 ; à t=0, on ferme l'interrupteur K.

1) Analyser qualitativement les phénomènes.
2) Donner les expressions de q(t) et de ω(t) ; en déduire q(∞) et ω(∞).

Calculer l'énergie perdue par effet Joule entre t=0 et t=∞, ceci de deux manières différentes : calcul direct, puis bilan énergétique.

• CORRIGE :

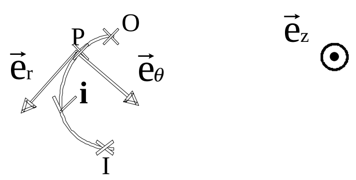
« Freinage d'un disque par induction »

1) Les électrons libres du disque, entraînés par ce dernier dans un champ magnétique, vont être soumis à des forces qu'ils vont transmettre au disque lui-même ; un moment de force va apparaître, qui, obéissant à la loi de Lenz, va freiner la roue

Comme dans l'exercice 29.1, il y a « commutation » des lignes de courant au niveau du contact I : la surface du circuit électrique est mal définie, donc nous ne calculerons pas la f.e.m par la variation temporelle du flux (si l'on pense que les électrons vont purement **radialement** de O vers I, alors la surface du circuit reste constante et l'on ne voit pas comment il pourrait y avoir de f.e.m induite…).

2) De manière générale, dans ce genre d'exercice « d'électromécanique », il faut écrire une **équation électrique** (avec calcul de f.e.m et intervention, outre la variable électrique, de la variable mécanique) et une **équation mécanique** (avec calcul de la force de Laplace ou de son moment et intervention de la variable électrique) : on obtient 2 équations **couplées** à résoudre.

• **équation électrique :** nous allons travailler en coordonnées cylindriques, en raisonnant sur la figure ci-dessous :

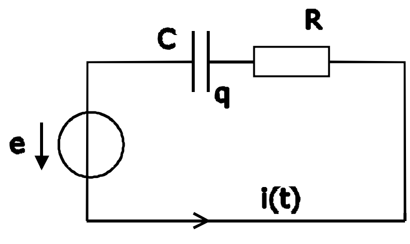


On choisit un point P courant d'une ligne de courant quelconque et nous **montrerons** que la f.e.m ne dépend pas de la forme de la ligne; tout se passe comme si le courant était purement radial (tout au moins en ce qui concerne l'aspect électrique des phénomènes).

$$e=\int_O^I(\vec{v}_e\wedge\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_O^I(r\omega\vec{e}_\theta\wedge B\vec{e}_z)\cdot(dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta)=\int_O^I B\omega r\vec{e}_r\cdot(dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta)=\int_0^a B\omega rdr=\frac{Ba^2\omega}{2}$$

Rq : on constate bien que la variable θ (dont dépend la courbure de la ligne de courant) n'intervient pas dans le résultat.

Le schéma électrocinétique équivalent est le suivant :



On a alors : $\boxed{e=Rdq/dt+q/C=\dfrac{B\omega a^2}{2}}$ (1)

• **équation mécanique :** sur un élément de longueur $d\vec{l}$ apparaît une force $d\vec{F}=id\vec{l}\wedge\vec{B}$, donc un moment élémentaire en O :

$$d\vec{M}_O^{Lap}=\overrightarrow{OP}\wedge(id\vec{l}\wedge\vec{B})=ir\vec{e}_r\wedge[(dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta)B\vec{e}_z]=ir\vec{e}_r\wedge(-Bdr\vec{e}_\theta+rBd\theta\vec{e}_r)=-iBrdr\vec{e}_z\Rightarrow$$

$$\vec{M}_O^{Lap}=\int_0^a -iBrdr\vec{e}_z=-\frac{iBa^2}{2}\vec{e}_z$$

On peut alors appliquer le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation Oz, en remarquant que le poids passe par cet axe (si le disque est équilibré) et que les liaisons sont parfaites, d'où :

$$\boxed{J\frac{d\omega}{dt}=-\frac{Bia^2}{2}=-\frac{Ba^2}{2}\frac{dq}{dt}} \quad (2)$$

En tenant compte de q(0)=0 et de $\omega(0)=\omega_0$, l'intégration de (2) donne :

$J[\omega(t)-\omega_0]=-\dfrac{Ba^2}{2}q(t)\Rightarrow \omega(t)=\omega_0-\dfrac{Ba^2}{2J}q(t)$ (3), que l'on reporte dans (1) ; on obtient alors :

$\dfrac{dq}{dt}+(\dfrac{1}{RC}+\dfrac{B^2a^4}{4RJ})q=\dfrac{Ba^2\omega_0}{2}$ $\Rightarrow$ en tenant compte de la condition q(0)=0, on peut écrire :

$$\boxed{q(t)=q(\infty)[1-\exp(-t/\tau)] \quad \text{avec:} \quad \tau=\frac{RC}{1+\dfrac{B^2a^4C}{4J}} \quad \text{et:} \quad q(\infty)=\frac{\dfrac{Ba^2\omega_0C}{2}}{1+\dfrac{B^2a^4C}{4J}}}$$

Par ailleurs, en reportant dans (3), il vient :

$$\boxed{\omega(t)=\omega_0[1-\frac{\dfrac{B^2a^4C}{4J}}{1+\dfrac{B^2a^4C}{4J}}(1-e^{-t/\tau})] \quad \text{et:} \quad \omega(\infty)=\frac{\omega_0}{1+\dfrac{B^2a^4C}{4J}}}$$

1) • Le calcul direct correspond à :

$W_J=\int_0^\infty Ri(t)^2dt=\int_0^\infty R(dq/dt)^2dt=\int_0^\infty R(\dfrac{q(\infty)}{\tau})^2\exp(-2t/\tau)dt=\dfrac{Rq(\infty)^2}{2\tau}$, où $q(\infty)$ et τ sont connus.

• Dans un bilan énergétique, il faut considérer les formes d'énergie mises en jeu :

énergie cinétique de rotation : $E_C(o)=1/2J\omega_0^2$ et: $E_C(\infty)=1/2J\omega_\infty^2$

énergie emmagasinée par le condensateur : $W_C(0)=0$ et: $W_C(\infty)=\dfrac{q_\infty^2}{2C}$

énergie perdue par effet Joule entre t=0 et t=∞ : W_J (c'est le terme que l'on cherche)

Rq : nous ne ferons pas intervenir l'énergie potentielle de pesanteur qui, ici, reste constante.

Le bilan s'énonce : « énergie totale finale = énergie totale initiale - énergie perdue » ⇒

$W_J=E_C(0)+0-E_C(\infty)-W_C(\infty)=1/2J\omega_0^2-1/2J\omega_\infty^2-\dfrac{q_\infty^2}{2C}\Rightarrow$ on trouve après calculs :

$\boxed{W_J=1/2J\omega_0^2(\dfrac{B^2R^4C/4J}{1+B^2R^4C/4J})}$ (ce qui permet de comparer ce terme à l'énergie initiale)

Rq : le condensateur n'est pas nécessaire ; en son absence, l'énergie cinétique du disque serait convertie en chaleur par effet Joule (simple « freinage rhéostatique »). Grâce au condensateur, une partie de l'énergie initiale n'est pas perdue, mais stockée et, éventuellement réutilisée : on parlera (comme dans le chapitre 35 du programme PSI) de « freinage avec récupération ».